



УДК 517.956

**КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ
ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА****THE CORRECTNESS OF THE DIRICHLET PROBLEM IN A CYLINDRICAL
DOMAIN FOR THREE-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS
WITH DEGENERATION OF TYPE AND ORDER****Е.Т. Китайбеков****E.T. Kitaybekov***Казахский Национальный педагогический университет им. Абая, Алматы
Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty**E-mail: Er-kaz_89@mail.ru*

Аннотация. В работе показана однозначная единственность классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для трехмерных гиперболо – параболических уравнений с вырождением типа и порядка.

Resume. The paper shows the unique solvability of the classical Dirichlet problem in cylindrical domain for three-dimensional elliptic equations with degeneration type and order.

Ключевые слова: задача Дирихле, вырождение типа и порядка, разрешимость, функция Бесселя.
Key words: Dirichlet problem, degeneration of the type and order, solvability, Bessel function.

Введение

Теория краевых задач для вырождающихся гиперболо – параболических уравнений на плоскости изучены в [1].

Многомерные аналоги этих задач в обобщенных пространствах исследованы в [2]. Корректности задач Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений установлены [3,4].

Разрешимость задачи Дирихле в цилиндрической области для трехмерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка показано [5], а в данной работе доказывается ее единственность решения.

Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ – цилиндрическая область евклидова пространства E_3 точек (x_1, x_2, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, x_2)$.



Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$ – а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ – части поверхности Γ , лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, σ_α – верхнее, а σ_β – нижнее основания области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S – общая границ областей Ω_α и Ω_β представляющее множество в $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_2 .

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающихся трехмерные гиперболо-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 p_i(t) u_{x_i x_i} - p_3(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^2 a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t + c(x, t) u = 0, & t > 0, \\ \sum_{i=1}^2 g_i(t) u_{x_i x_i} - u_t + \sum_{i=1}^2 d_i(x, t) u_{x_i} + e(x, t) u, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $p_i(t) > 0$ при $t > 0, p_i(0) = 0, g_j(t) > 0$ при $t > 0$, и могут обращаться в нуль при $t = 0, p_i(t) \in C([0, \alpha]) \cap C^2((0, \alpha)), g_j(t) \in C([\beta, 0]), i = 1, 2, 3, j = 1, 2$.

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат x_1, x_2, t с полярными $r, \theta, t: x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$.

Задача 1 (Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$, из класса $C^1(\overline{\Omega_{\alpha\beta}}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\sigma_\alpha} = 0, \quad u|_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = 0, \quad u|_{\sigma_\beta} = 0. \quad (3)$$

Пусть

$$\frac{a_i(r, \theta, t)}{p_3(t)}, \frac{b(r, \theta, t)}{p_3(t)}, \frac{c(r, \theta, t)}{p_3(t)} \in C^1(\overline{\Omega_\alpha}) \cap C^2(\Omega_\alpha), d_j(r, \theta, t), e(r, \theta, t) \in C^1(\overline{\Omega_\beta}) \cap C^2(\Omega_\beta),$$

$$i = 1, 2, 3, j = 1, 2, e(r, \theta, t) \leq 0, \forall (r, \theta, t) \in \Omega_\beta.$$

Тогда справедлива

Теорема. Если выполняется условие

$$\cos \mu_{s,n} \alpha' \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

то решение задачи 1 тривиальное, где $\mu_{s,n}$ – положительные нули функций Бесселя первого рода

$$J_n(z), \quad \alpha' = \int_0^\alpha \sqrt{\frac{k_1(\xi) + k_2(\xi)}{2k_3(\xi)}} d\xi, \quad n = 0, 1, \dots.$$



Доказательство теоремы

Рассмотрим задачу (1), (3) в области Ω_μ и докажем, что ее решение нулевое. Для этого сначала построим решение первой краевой задачи для уравнения

$$L_1^* v \equiv \sum_{i=1}^2 g_i(t) u_{x_i x_i} + v_t - \sum_{i=1}^2 d_i v_{x_i} + dv = 0, \quad (5)$$

с данными

$$v|_S = \tau(r, \theta) = \tau_{10}(r), \quad v|_{\Gamma_\beta} = 0, \quad (6)$$

где $d(x, t) = e - \sum_{i=1}^2 d_{x_i}$, $\tau_{10}(r) \in G$, G – множество функций $\tau(r)$ из класса $C([0, 1]) \cap C^1((0, 1))$

Множество G плотно всюду в $L_2((0, 1))$ ([6]).

Решение задачи (5), (6) в полярных координатах будем искать в виде

$$v(r, \theta, t) = v_{10}(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_{1n}(r, t) \cos n\theta + v_{2n}(r, t) \sin n\theta), \quad (7)$$

где $v_{10}(r, t)$, $v_{1n}(r, t)$, $v_{2n}(r, t)$ – функции, которые будут определены ниже.

Подставляя (7) в (5), в полярных координатах будем иметь

$$\begin{aligned} L_1^* v \equiv & g_1(t) \left(\cos^2 \theta v_{10rr} + \frac{\sin^2 \theta}{r} v_{10r} \right) + g_2(t) \left(\sin^2 \theta v_{10r} + \frac{\cos^2 \theta}{r} v_{10r} \right) - v_{10t} - \\ & - d_1(r, \theta, t) \cos \theta v_{10r} - d_2(r, \theta, t) \sin \theta v_{10r} + d(r, \theta, t) v_{10} + \\ & + \sum_{i=1}^2 \left\{ g_1(t) \left[\cos^2 \theta (\cos n\theta v_{1nrr} + \sin n\theta v_{2nrr}) + \frac{\sin^2 \theta}{r} (\cos n\theta v_{1nr} + \sin n\theta v_{2nr}) + \right. \right. \\ & + \frac{n \sin 2\theta}{r} (\sin n\theta v_{1nr} - \cos n\theta v_{2nr}) + \frac{n \sin 2\theta}{2r^2} (\cos n\theta v_{2n} - \sin n\theta v_{1n}) - \\ & - \frac{n^2 \sin^2 \theta}{r^2} (\cos n\theta v_{1n} + \sin n\theta v_{2n}) \left. \right] + g_2(t) \left[\sin^2 \theta (\cos n\theta v_{1nrr} + \sin n\theta v_{2nrr}) + \right. \\ & + \frac{n \sin 2\theta}{r} (\cos n\theta v_{2nr} - \sin n\theta v_{1nr}) + \frac{\cos^2 \theta}{r} (\cos n\theta v_{1nr} - \sin n\theta v_{2nr}) + \\ & + \frac{n \sin 2\theta}{2r^2} (\sin n\theta v_{1n} - \cos n\theta v_{2n}) - \frac{n^2}{r^2} \cos^2 \theta (\cos n\theta v_{1n} + \sin n\theta v_{2n}) \left. \right] - v_{1nt} \cos n\theta - \\ & - v_{2nt} \sin n\theta - d_1 \left[\cos \theta (\cos n\theta v_{1nr} + \sin n\theta v_{2nr}) + \frac{n \sin \theta}{r} (\sin n\theta v_{1n} - \cos n\theta v_{2n}) \right] - \\ & - d_2 \left[\sin \theta (\cos n\theta v_{1nr} + \sin n\theta v_{2nr}) + \frac{n \cos \theta}{r} (\cos n\theta v_{2n} - \sin n\theta v_{1n}) \right] + \\ & + d (\cos n\theta v_{1n} + \sin n\theta v_{2n}) \} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь полученное выражение (8) сначала умножим на $\rho(\theta) \neq 0$ а затем проинтегрируем от 0 до 2π . После несложных преобразований получим ряд



$$\begin{aligned} & \frac{(g_1 + g_2)}{2} \rho_{10} \left(v_{10rr} + \frac{1}{r} v_{10r} \right) - \rho_{10} v_{10t} - \frac{(g_1 - g_2)}{2} d_{10} \left(v_{10rr} - \frac{1}{r} v_{10r} \right) + \\ & + a_{10}(r, t) v_{10r} + c_{10}(r, t) v_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^2 \left[\frac{(g_1 + g_2)}{2} \rho_{jn} (v_{jnrr} + \right. \right. \\ & + \frac{1}{r} v_{jnrr} - \frac{n^2}{r^2} v_{jn}) - \rho_{jn} v_{jnt} + \frac{(g_1 - g_2)}{2} d_{jn} \left(v_{jnrr} - \frac{1}{r} v_{jnrr} - \frac{n^2}{r^2} v_{jn} \right) + \\ & \left. \left. + \frac{(g_2 - g_1)}{2} e_{jn} \left(v_{jnrr} - \frac{v_{jn}}{2r} \right) + a_{jn}(r, t) v_{jnrr} + c_{jn}(r, t) v_{jn} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\rho_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \cos n\theta d\theta, \rho_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \sin n\theta d\theta, d_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\theta \cos n\theta d\theta,$$

$$d_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\theta \sin n\theta d\theta, e_{1n} = - \int_0^{2\pi} \rho \sin 2\theta \sin n\theta d\theta, e_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \sin 2\theta \cos n\theta d\theta,$$

$$a_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho (-d_1 \cos \theta - d_2 \sin \theta) \cos n\theta d\theta, a_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho (-d_1 \cos \theta - d_2 \sin \theta) \sin n\theta d\theta,$$

$$c_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho \left[(-d_1 \sin \theta + d_2 \cos \theta) \frac{n \sin n\theta}{r} + d \cos n\theta \right] d\theta,$$

$$c_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \left[(-d_2 \cos \theta + d_1 \sin \theta) \frac{n \cos n\theta}{r} + d \sin n\theta \right] d\theta, n = 0, 1, \dots$$

Далее, рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$g(t) \rho_{10} \left(v_{10rr} + \frac{1}{r} v_{10r} \right) - \rho_{10} v_{10t} = 0, g(t) = \frac{g_1(t) + g_2(t)}{2}, \quad (10)$$

$$g(t) \rho_{j1} \left(v_{j1rr} + \frac{1}{r} v_{j1r} - \frac{v_{j1}}{r^2} \right) - \rho_{10} v_{j1t} = \frac{(g_2 - g_1) d_{10}}{2} \left(v_{10rr} - \frac{v_{10r}}{r} \right) - a_{10} v_{10r} - c_{10} v_{10}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & g(t) \rho_{jn} \left(v_{jnrr} + \frac{1}{r} v_{jnrr} - \frac{n^2}{r^2} v_{jn} \right) - \rho_{jn} v_{jnt} = - \frac{(g_1 - g_2)}{2} d_{jn} \left(v_{jnrr} - \frac{1}{r} v_{jnrr} - \frac{n^2}{r^2} v_{jn} \right) - \\ & - \frac{(n-1)^2}{r^2} v_{jn-1} - \frac{(g_2 - g_1)(n-1)}{r} e_{jn-1} \left(v_{jn-1r} - \frac{v_{jn-1}}{r} \right) - \\ & - a_{jn-1} v_{jn-1r} - c_{jn-1}, j = 1, 2, n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что если $\{v_{10}, v_{jn}\}, j = 1, 2, n = 1, 2, \dots$ – решение системы (10), (11), то оно является и решением уравнения (9).

Далее, учитывая ортогональность ([6]) систем тригонометрических функций $\left\{ \frac{1}{2}, \cos n\theta, \right.$

$\sin n\theta, n = 1, 2, \dots \}$ на отрезке $[0, 2\pi]$ из краевого условия (6) в силу (7) будем иметь



$$v_{10}(r, \beta) = 0, \quad v_{10}(r, 0) = \tau_{10}(r), \quad (12)$$

$$v_{jn}(r, \beta) = 0, \quad v_{jn}(r, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Таким образом, задача (5), (6) сведена к системе задач для уравнений (10), (11) с данными (12) и (13). Теперь будем находить решения этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (10), (11) можно представить в виде

$$g(t) \left(v_{nrr} + \frac{1}{r} v_{nr} - \frac{n^2}{r^2} v_n \right) - v_{nt} = f_n(r, t), \quad (14)$$

где $f_n(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0(r, t) \equiv 0$.

В [7] показано, что краевые задачи для уравнения (14) с условиями (12) и (13) имеют единственные решения.

Следовательно, сначала решив задачу (10), (12) ($j=1, n=0$), а затем (11), (13) ($j=1, 2, n=1$) и т.д. найдем последовательно все $v_{10}(r, t)$, $v_{jn}(r, t)$, $j=1, 2, n=1, 2, \dots$.

Итак, показано, что

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta) L_1^* v d\theta = 0. \quad (15)$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r) \rho(\theta) T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 — плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty((0, 2\pi))$ — плотна в $L_2((0, 2\pi))$, а $T(t) \in V_1$, V_1 — плотна в $L_2((0, \beta))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes (0, 2\pi) \otimes V_1$ — плотна в $L_2(D_\beta)$ [6].

Отсюда и из (15) следует, что

$$\int_{\Omega_\beta} f(r, \theta, t) L_1^* v d\Omega_\beta = 0$$

и

$$L_1^* v = 0, \quad \forall (r, \theta, t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решение задачи (5), (6) построено.

Аналогичным образом, строится решение этой задачи, если

$$\tau(r, \theta) = \tau_{1n}(r) \cos n\theta + \tau_{2n}(r) \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из определения взаимно-сопряженных операторов L_1, L_1^* , ([7]) имеем

$$L_1 \equiv \sum_{i=1}^2 g_i(t) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 d_i \frac{\partial}{\partial x_i} + e,$$

$$L_1^* \equiv \sum_{i=1}^2 g_i(t) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 d_i \frac{\partial}{\partial x_i} + d,$$

$$v L_1 u - u L_1^* v \equiv -v P(u) + u P(v) - uv Q,$$



где $P(u) = \sum_{i=1}^2 g_i(t) u_{x_i} \cos(N^\perp, x_i)$, $Q = \cos(N^\perp, t) - \sum_{i=1}^2 d_i \cos(N^\perp, t)$, а N^\perp – внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega_\beta$.

Отсюда, по формуле Грина, получим

$$\int_S \tau(r, \theta) u(r, \theta, 0) ds = 0. \quad (16)$$

Поскольку система функций $\{1, \cos n\theta, \sin n\theta, n = 1, 2, \dots\}$ плотна в $L_2((0, 2\pi))$ ([6]), то из (16) заключаем, что $u(r, \theta, 0) = 0, \forall (r, \theta) \in S$.

Сталь быть, по принципу экстремума для параболического уравнения решение задачи (1), (3) $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_\beta$ ([8]).

В [9] показано, что если выполняется условие (4), то решение задачи (1), (2) в $\overline{\Omega}_\alpha$ $u \equiv 0$.

Теорема доказана.

Литература

1. Нахушев А. М. 2006. Задачи со смещением для уравнения в частных производных, М.: Наука: 287.
Nakhushev A.M. 2006. Problems with a Shift for Partial Differential Equations. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Врагов В. Н. 1983. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, Новосибирск: НГУ: 84.
Vragov, V.N. 1983. Boundary Value Problems for Non-classical Equations of Mathematical Physics. Novosibirsk: NGU (in Russian).
3. Алдашев С. А. 1983. Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина. Научные ведомости БелГУ. Математика, Физика, Белгород: 2012, №5(124), вып. 6. -с.12-25.
Aldashev S. A. 2012. Correctness of Dirichlet's and Poincare's problems' in cylindrical domain for degenerated multi-dimensional hyperbolic equations with Chaplygin's operator. Belgorod State University Scientific bulletin Mathematics & Physics, vol. 6. №5(124): 12-25 (in Russian).
4. Алдашев С. А. 2014. Задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений. Материалы IV межд. конференции "Математическая физика и ее приложения," СамГУ, Самара: 46
Aldashev S. A. 2014. Fourth international conference "Mathematical Physics and Its Applications" Samara state University, Samara: 46
5. Китайбеков Е. Т. 2016. Задача Дирихле для трехмерных гиперболических - параболических уравнений с вырождением типа и порядка. Вестник КазНУ им. Ал-Фараби. серия математика, механика, информатика. №1(88): 28-34.
Kitaybekov E. T. 2016. Dirichlet problem for three-dimensional hyperbolic-parabolic equations with type and order extinction. KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series, №1 (88): 28-34 (in Russian).
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1976. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука: 543.
Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. 1976. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Смирнов В. И. 1981. Курс высшей математики, Т.4, № 2, М.: Наука: 550.
Smirnov V.I. 1981. A Course of Higher Mathematics. Vol. 4, part 2. Moscow: Nauka (in Russian).
8. Фридман А. 1968. Уравнения с частными производными параболического типа, М.: Мир: 527.
Fridman A. 1968. Hyperbolic Partial Differential Equations. Moscow: Mir (in Russian).
9. Китайбеков Е. Т. 2016. Единственность решения задачи Дирихле в цилиндрической области для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка. Журнал "Вычислительной и прикладной математики", Киев: КНУ им. Т. Шевченко, № 3(123): 27-32.
Kitaybekov E. T. 2016. The uniqueness of the solution of Dirichlet problem in a cylindrical domain for three-dimensional hyperbolic equations with type and order degeneration. The journal "Computational and applied mathematics", Kiev: KNU them. T. Shevchenko. No. 3(123): 27-32 (in Russian).